Université Paul Sabatier Année 2018-2019
Algèbre 1ère année

Mardi 7 mai 2019 — Contrôle Terminal d'algèbre — Durée 2 heures

Toutes les réponses doivent être justifiées. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction lors de la correction. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1. [**8 points**] Pour tout réel a, on considère pour la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & a \\ 2 & 2a-2 & -a-2 & 3a-1 \\ 3 & a+2 & -3 & 2a+1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de $M(a)$.

   Indication : on commencera par créer une ligne ou une colonne creuse (c-à-d. avec beaucoup de zéros)en effectuant des opérations sur les lignes ou les colonnes, avant de développer le déterminant. On vérifiera à la fin du calcul que $a = 1$ et $a = 5$ sont les valeurs de a qui annulent ce déterminant.

   SOLUTION : **[1,5 points]** Det$(M(a)) = (a-1)(a-5)^2$

2. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?

   SOLUTION : **[0,5 point]** $(M(a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 5$

3. Déterminer le rang de la matrice $M(a)$, discuter suivant les valeurs de a.

   SOLUTION : **[2 points]** Le rang de $(M(a))$ est 4 pour $a \neq 1$ et $a \neq 5$. Le rang de $M(1)$ est 3 et celui de $M(5)$ vaut 2.

4. Soit ϕ_a l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M(a)$. Pour quelles valeurs de a l'application ϕ_a est-elle injective ? surjective ?

   SOLUTION : **[1 point]** ϕ_a est injective, bijective et surjective si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 5$.

5. Déterminer le noyau et l'image de ϕ_a. Pour les cas $a = 1$ et $a = 5$, donner une base de $\ker(\phi_a)$ et de $Im(\phi_a)$.

   SOLUTION : **[3 points]** ϕ_a est injective, bijective et surjective si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 5$. Dans ce cas, $\ker(\phi_a) = \{\overrightarrow{0}\}$ et $Im(\phi_a) = \mathbb{R}^4$.Pour $a = 1$, $\ker(\phi_a) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ et $Im(f)$ a pour base $\phi_a(e_1), \phi_a(e_2), \phi_a(e_3)$, $\dim(\ker(\phi_a) = 1$, $\dim(Im(\phi_a) = 3$. Lorsque $a = 5$, $dim(Im(\phi_5) = 2$. Les deux premiers vecteurs colonnes de la matrice forment une base de $Im(\phi_5)$ et $\ker(\phi_a)$ a pour équations cartésiennes, $\begin{bmatrix} x+y+z+t = & 0 \\ 2y-3z+4t = & 0 \end{bmatrix}$ et pour base les vecteurs $\begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2. [**10 points**] Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on note Can, la base de E, formée des trois vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (3x + 3z, 2x + 2y + 2z, x + 4y + z)$

On considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$.

1. Est-ce que f est une application linéaire? Donner la matrice A de f dans la base canonique. Justifier votre réponse.

SOLUTION : **[2 points]** Oui car $f = T_A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Démontrer que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.

SOLUTION : **[1 point]** Par exemple $\det(u_1, u_2, u_3) = -3$, non nul donc la famille $\mathcal{U}$ est une base de de E

3. La suite de l'exercice a pour objectif le calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$, et exprimer leurs images dans la base $\mathcal{U}$.

SOLUTION : **[2 points]** $f(u_1) = \overrightarrow{0},\ f(u_2) = 3u_1,\ f(u_3) = 6u_3$

(b) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{U}$.

SOLUTION : **[1 point]** $T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(c) Démontrer par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 2$.

SOLUTION : **[1 point]** On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$, si $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$ alors $T^{n+1} = TT^n = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^{n+1} \end{pmatrix}$. La propriété est vraie pour $n = 2$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$

(d) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont u_1, u_2, u_3.

Expliquer **sans aucun calcul** pourquoi la matrice P est inversible et calculer son inverse.

SOLUTION : **[1,5 points]** Cette matrice est une matrice de changement de base donc elle est inversible. Le calcul donne $P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) Démontrer que $PTP^{-1} = A$, puis en déduire A^n pour tout $n \geq 1$.

Solution : **[1,5 points]** Soit calcul, soit cours : c'est la formule de changement de base, d'où $PTP^{-1} = A$. La matrice A^n est la matrice de f^n dans la base Can et la matrice T^n est la matrice de f^n dans la base $\mathcal{U}$, la formule de changement de base précédente donne donc $PT^nP^{-1} = A^n$.
On peut aussi effectuer une démonstration par récurrence qui utilise $P^{-1}P = I_3$:
La formule est vraie aux rangs 0 et 1, et si elle est vraie au rang n, alors,
$A^{n+1} = AA^n = PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$, car $P^{-1}P = I_3$. Donc la formule est vraie au rang $n+1$; cette formule est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

On laisse au lecteur le calcul final.

Exercice 3. [**2 points**] Soient le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et les vecteurs de E :
$U_1 = (1, 1, -1, 1),\ U_2 = (5, 1, -1, 4),\ U_3 = (3, 1, -1, 2)$.
On considère les deux sous-espaces vectoriels de E définis par :
$F = \mathrm{Vect}(U_1, U_2, U_3)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E, x - y + z = 0 \text{ et } x + 2z - t = 0\}$.
Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ? Votre réponse doit être argumentée.

Solution : La somme n'est pas directe. On montre (par exemple, car d'autres voies sont possibles) $\dim F = 3,\ 2 = \dim G$. On conclut à l'aide de la dimension de $F + G$,
$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - \dim(F \cap G) \leq 4$.
Ce qui implique $\dim(F \cap G) \geq 1$.
Donc $F \cap G \neq \{\overrightarrow{0}\}$, et la somme $F + G$ n'est pas directe.